

[1] 座標平面上の四角形 ABCD は以下の条件を満たすとする.

- (a) 頂点 A の座標は  $(-1, -1)$  である.
- (b) 四角形の各辺は原点を中心とする半径 1 の円と接する.
- (c)  $\angle BCD$  は直角である.

また, 辺 AB の長さを  $l$  とし,  $\angle ABC = \theta$  とする.

(1)  $\angle BAD = \frac{\pi}{\boxed{(1)}}$  である.

(2) 辺 CD の長さが  $\frac{5}{3}$  であるとき,  $l = \frac{\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$ ,  $\tan \theta = \frac{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}}$  である.

(3)  $\theta$  は鋭角とする. 四角形 ABCD の面積が 6 であるとき,  $l = \boxed{(7)} + \sqrt{\boxed{(8)}}$ ,  
 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{(9)}}$  である.

[2] 数列  $\{a_n\}$  は

$$a_{n+1} = -|a_n| - \frac{1}{2}a_n + 5 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする.

(1)  $a_1 = \frac{1}{2}$  ならば,  $a_2 = \frac{\boxed{(10)}\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}}$ ,  $a_3 = -\frac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}$  である.

(2)  $-2 \leq a_n \leq -1$  ならば,  $a_{n+1}$  および  $a_{n+2}$  の取り得る値の範囲は, それぞれ  $\boxed{(16)} \leq a_{n+1} \leq \frac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}$ ,  $-\frac{\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}} \leq a_{n+2} \leq -\boxed{(21)}$  である.

以下,  $a_1 = 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$  とする.

(3)  $a_n < 0$  となる自然数  $n$  のうち最小のものを  $m$  とすると,  $m = \boxed{(22)}\boxed{(23)}$  である.

(4) (3) の  $m$  に対して, 自然数  $k$  が  $2k \geq m$  を満たすとき,

$$a_{2k+2} = -\frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}a_{2k} - \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$$

より

$$a_{2k} = -\frac{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}} + \frac{3}{\boxed{(31)}\boxed{(32)}} \left( -\frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}} \right)^{k-\boxed{(35)}}$$

が成り立つ.

[3]  $x$  の関数が印刷されているカード 25 枚が 1 つの袋に入っている。その内訳は、11 枚に  $1 - 3x$ 、9 枚に  $1 - 2x$ 、4 枚に  $1 - 2x + 2x^2$ 、1 枚に  $1 - 3x + 5x^2$  である。この袋からカードを 1 枚取り出し、印刷されている関数を記録してから袋に戻すことを 100 回繰り返したところ、記録の内訳は  $1 - 3x$  が 46 回、 $1 - 2x$  が 35 回、 $1 - 2x + 2x^2$  が 15 回、 $1 - 3x + 5x^2$  が 4 回であった。

(1) 記録された関数の実数  $x$  における値を  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  とおく。  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  の平均値は、 $x$  の値を定めるとそれに対応して値が定まるので、 $x$  の関数である。

この関数は  $x = \frac{\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}}$  のとき最小となり、その値は  $-\frac{\boxed{(38)} \boxed{(39)}}{\boxed{(40)}}$  である。

(2) 記録された関数の  $x = 0$  から  $x = 1$  までの定積分を  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$  とおく。

$b_1, b_2, \dots, b_{100}$  の平均値は  $-\frac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)} \boxed{(43)}}$  であり、分散は  $\frac{\boxed{(44)} \boxed{(45)}}{\boxed{(46)} \boxed{(47)}}$  である。

また、記録された関数の  $x = 1$  における値を  $c_1, c_2, \dots, c_{100}$  とおくと、100 個のデータの組  $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \dots, (b_{100}, c_{100})$  の共分散は  $\frac{\boxed{(48)} \boxed{(49)}}{\boxed{(50)} \boxed{(51)}}$  である。

(3) カードがすべて袋に入った状態から 1 枚取り出したとき、印刷されている関数の  $x = 1$  における値が負である条件のもとで、その関数の 0 から 1 までの定積分が

負である条件付き確率は  $\frac{\boxed{(52)} \boxed{(53)}}{\boxed{(54)} \boxed{(55)}}$  である。

[4]  $t$  を実数とする．また， $O$  を原点とする座標空間内に 3 点  $A(4, 2, 5)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(2 - t, 4 - 3t, 6 + 2t)$  をとる．

(1)  $\triangle OAB$  の面積を求めよ．

(2) 4 点  $O, A, B, C$  が同一平面上にあるとき， $C$  の座標を求めよ．

(3) 点  $C$  が  $xy$  平面上にあるとき，四面体  $OABC$  の体積  $V$  を求めよ．

(4) 四面体  $OABC$  の体積が (3) で求めた  $V$  の 3 倍となるような  $t$  の値をすべて求めよ．

[5]  $a$  を 2 以上の整数,  $p$  を整数とし,  $s = 2^{2p+1}$  とおく. 実数  $x, y$  が等式

$$2^{a+1} \log_2 3^x + 2x \log_2 \left( \frac{1}{3} \right)^x = \log_s 9^y$$

を満たすとき,  $y$  を  $x$  の関数として表したものを  $y = f(x)$  とする.

- (1) 対数の記号を使わずに,  $f(x)$  を  $a, p$  および  $x$  を用いて表せ.
- (2)  $a = 2, p = 0$  とする. このとき,  $n \leq f(m)$  を満たし, かつ,  $m + n$  が正となるような整数の組  $(m, n)$  の個数を求めよ.
- (3)  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq 2^{a+1}$ ) の最大値が  $2^{3a}$  以下となるような整数  $p$  の最大値と最小値を, それぞれ  $a$  を用いて表せ.

[6] 関数  $F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{x+1} (|t-1| - 1) dt$  に対し,  $y = F(x)$  で定まる曲線を  $C$  とする.

(1)  $F(x)$  を求めよ.

(2)  $C$  と  $x$  軸の共有点のうち,  $x$  座標が最小の点を  $P$ , 最大の点を  $Q$  とする.  $P$  における  $C$  の接線を  $l$  とするとき,  $C$  と  $l$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ. また,  $Q$  を通る直線  $m$  が  $S$  を 2 等分するとき,  $l$  と  $m$  の交点  $R$  の座標を求めよ.