2020年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は 3，4，5，8，9，10 ページに印刷してあります．試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙A（マークシート）が 1 枚と，解答用紙Bが 1 枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙A（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Bに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙A（マークシート）および解答用紙Bのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙A（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙A（マークシート）への記入に先立って，解答用紙A（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の 2 ページ目に記載された「解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および 6，7，11，12 ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，1 ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Bの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1.　問題の [1] から [3] の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

[例]　$\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「45」と解答する場合は，右の例のように解答欄 (11) の $\boxed{4}$ と解答欄 (12) の $\boxed{5}$ にマークしてください．

　なお，解答欄にある $\boxed{-}$ はマイナスの符号 $-$ を意味します．

(11)	(12)
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
0	0
−	−

2.　解答欄 (1), (2), $\cdots$ は，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号 $-$ のいずれか1つに対応します．それらを (1), (2), $\cdots$ で示された解答欄にマークしてください．

　下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号 $-$ は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

[例]

$$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3} \qquad\qquad 0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$x - y \longrightarrow 1x + (-1)\,y \longrightarrow \boxed{0}\boxed{1}\,x + \boxed{-}\boxed{1}\,y$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] a, b, c は条件 $a^2+b^2+ab=c^2$, $a<b$ を満たす自然数とする.

(1) $a=3$ であるとき, $c=\boxed{(1)}$ である.

(2) 和が 21 になる 2 つの自然数の積の最大値は $\boxed{(2)}\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ であることから, $a+b=21$ であるとき, $c=\boxed{(5)}\boxed{(6)}$ である.

(3) $a+b-c=p$ とおくと, a, b, p は

$$\left(a-\boxed{(7)}p\right)\left(b-\boxed{(8)}p\right)=\boxed{(9)}p^2$$

を満たす. よって, p が 5 以上の素数であるとき, 条件を満たす a, b, c の組は全部で $\boxed{(10)}$ 個ある. また, $p=7$ であるとき, c の値が最小となるのは, $a=\boxed{(11)}\boxed{(12)}$, $b=\boxed{(13)}\boxed{(14)}$ のときである.

[2] 1個のさいころを8回続けて投げる．ただし，さいころを1回投げ終えるごとに，それまでに出た目の合計を記録しておく．

(1) さいころを3回投げ終えた時点で，それまでに出た目の合計がちょうど9である確率は $\dfrac{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}\boxed{(18)}\boxed{(19)}}$ であり，合計が12以上である確率は $\dfrac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}}$ である．

(2) さいころを8回投げ終えるまでの間に，出た目の合計がちょうど6になることが起きる確率は，$a=\boxed{(22)}, b=\boxed{(23)}, c=\boxed{(24)}, d=\boxed{(25)}$ とおくと $\dfrac{a^b}{c^d}$ と書ける．

(3) 出た目の合計が初めて7以上になった時点で，その値が12以上である確率は，$e=\boxed{(26)}, f=\boxed{(27)}$ とおくと $\dfrac{a^e}{c^f}$ と書け，その値がちょうど9である確率は，$g=\boxed{(28)}, h=\boxed{(29)}, i=\boxed{(30)}, j=\boxed{(31)}$ とおくと $\dfrac{a^g}{c^h}-\dfrac{a^i}{c^j}$ と書ける．ただし，a, c は **(2)** で求めた値とする．

[3] 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を，$a_1 = 1,\ b_1 = 1$ かつ $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\frac{a_n}{b_n} < 2 \text{ ならば} \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}, \quad \frac{a_n}{b_n} \geqq 2 \text{ ならば} \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n + 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

で定める．

(1) $a_3 = \boxed{(32)}$，$b_3 = \boxed{(33)}$，$a_6 = \boxed{(34)}$，$b_6 = \boxed{(35)}$ である．

(2) 一般に，自然数 m に対して

$$a_{3m} = \boxed{(36)}\,m + \boxed{(37)}, \quad b_{3m} = \boxed{(38)}\,m + \boxed{(39)} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つと推測される．この推測が正しいことを次のように確かめる．

$m = 1$ のとき②は成り立つ．$m = k$ のとき②を仮定すると，①から

$$a_{3k+1} = \boxed{(40)}\,k + \boxed{(41)}, \quad b_{3k+1} = \boxed{(42)}\,k + \boxed{(43)}$$

となる．再び①から

$$a_{3k+2} = \boxed{(44)}\,k + \boxed{(45)}, \quad b_{3k+2} = \boxed{(46)}\,k + \boxed{(47)}$$

が成り立つ．さらに①から

$$a_{3k+3} = \boxed{(48)}\,k + \boxed{(49)}, \quad b_{3k+3} = \boxed{(50)}\,k + \boxed{(51)}$$

となるので，$m = k + 1$ のときにも②は成り立つ．

(3) $n \geqq 1$ に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 10^{a_k}$ とする．自然数 m に対して，$s = \boxed{(52)}$ とおくと

$$S_{3m} = \frac{\boxed{(53)}\boxed{(54)}}{\boxed{(55)}\boxed{(56)}}\left(10^{sm} - 1\right)$$ となる．よって，S_{3m} は $\boxed{(57)}\,m + \boxed{(58)}$ 桁の整数になる．

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] 座標空間の原点Oを中心とする半径1の球面上に A$(0,0,1)$, B$(0,0,-1)$ と異なる点 C(p,q,r) をとり，AとC，BとCを通る直線と xy 平面の交点を，それぞれP, Qとする．また，座標軸上に2点 R$\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, S$\left(0,\frac{1}{4},0\right)$ をとる．

(1) P, Qの座標をそれぞれ p,q,r を用いて表せ．

(2) Pが線分RS上を動くとき，Qの軌跡を xy 平面上に図示せよ．

(3) Pが線分RS上を動くとき，△ABCの面積の最小値を求めよ．

[5] 実数 α は $\log_8(2-\alpha)+\log_{64}(\alpha+1)=\log_4\alpha$ を満たすとする．また，点 $\left(\sqrt{3}\alpha, \alpha^2\right)$ に関して，曲線 $y=\log_2 x$ 上の点 (x, y) と対称な点を (s, t) とする．

(1) α の値を求めよ．

(2) t を s を用いて表せ．

(3) 実数 s, t が $s \leqq 0,\ t \geqq 0$ および **(2)** の関係式を満たすとき，

$$3\sin\left(\frac{s+t}{2}\pi\right)+\cos\left(\frac{s+t}{2}\pi\right)$$

の最大値と最小値を求めよ．必要ならば $1.5<\sqrt[3]{4}<1.6$ を用いてもよい．

[6] a を正の定数とする．また，x の 3 次式 $f(x)$ は次の条件を満たすとする．

$$f(0) = -a^2, \quad f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \int_0^a f(x)dx = 0$$

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $a = 4$ のとき，x 軸，y 軸および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

計 算 用 紙

計 算 用 紙