2020年度

慶應義塾大学入学試験問題

理工学部

数学

注意 1. 氏名と受験番号は，解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。

2. 解答は，解答用紙の所定の欄に，読みやすいように，ていねいに記入しなさい。

3. 解答用紙の余白および裏面には，何も書いてはいけません。

4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11, 12ページは余白です。

5. 問題冊子の余白は，計算および下書きに使用してもかまいません。

6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注　意　問題**1，2，3，4，5**の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ヌ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　iを虚数単位とする。複素数平面上で$z=x+yi$は，$|z|=1$ かつ $y \geqq 0$を満たしながら動くとする。ただし，xとyは実数である。このとき，点zのえがく図形をCとする。また，C上に2点$\mathrm{A}_1(z_1)$，$\mathrm{A}_2(z_2)$をとったとき，線分$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$の中点をMとする。

（i）　$z_1=1$とする。点$\mathrm{A}_2(z_2)$がC上を動くとき，Mがえがく曲線と実軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{（ア）}}$ である。

（ii）　2点$\mathrm{A}_1(z_1)$，$\mathrm{A}_2(z_2)$が$z_2\overline{z_1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$を満たしながら$C$上を動くとき，Mがえがく曲線の長さは $\boxed{\text{（イ）}}$ である。ただし，$\overline{z_1}$はz_1と共役な複素数である。

（2）　次の2つの放物線

$$C_1 : y=x^2,\ C_2 : y=x^2-4$$

を考える。C_2上の点P$(t,\ t^2-4)$からC_1に2本の接線を引く。これら2本の接線とC_1の接点をA，Bとする。ただし，点Aのx座標は点Bのx座標より小さいとする。このとき，点Aのx座標は，tを用いて表すと $\boxed{\text{（ウ）}}$ となる。

次に，線分PAを1:2に内分する点をQ，線分QBを2:3に内分する点をRとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\boxed{\text{（エ）}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\boxed{\text{（オ）}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}$である。点Pが$C_2$上を動くとき，点R$(x,\ y)$の軌跡の方程式は $y=\boxed{\text{（カ）}}$ である。

2

（1） $P(x)$ を整式とし，$P'(x)$ を $P(x)$ の導関数とする。このとき，$x=\alpha$ が方程式 $P'(x)=0$ の解となることは，$x=\alpha$ が方程式 $P(x)=0$ の 2 重解となるための必要条件であることを証明しなさい。

（2） k が 0 でない実数を動くとき，放物線 $C_1 : y=kx^2$ と円 $C_2 : (x-5)^2+y^2=7$ の共有点の個数は最大で $\boxed{\text{（キ）}}$ 個である。

（3） （2）において，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数がちょうど 1 個となる k を考える。このとき，共有点の x 座標は k の値によらず $\boxed{\text{（ク）}}$ である。また，k の取り得る値は $\boxed{\text{（ケ）}}$ である。

3

赤い玉と白い玉が3個ずつ入った箱があり，次のような操作を繰り返す。表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ のコインを投げ，

- 表が出た場合，1個の玉を箱から取り出す。
- 裏が出た場合，2個の玉を同時に箱から取り出す。

(1) $p=\dfrac{1}{2}$ とし，各操作で取り出した玉はもとの箱に戻すものとする。2回の操作で取り出した玉の色がすべて赤である確率は $\boxed{\text{(コ)}}$ である。

また，3回の操作で取り出した玉の総数が5個であるという条件の下で，取り出した玉の色がすべて赤である確率は $\boxed{\text{(サ)}}$ である。

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ とし，各操作で取り出した玉は箱に戻さないものとする。2回の操作で取り出した玉の色がすべて赤である確率は $\boxed{\text{(シ)}}$ である。

(3) $0<p<1$ とし，各操作で取り出した玉は箱に戻さないものとする。3回の操作で赤い玉と白い玉をちょうど2個ずつ取り出す確率は $\boxed{\text{(ス)}}$ である。

また，3回の操作で取り出した赤い玉と白い玉の数が等しい確率が $1-p$ となるのは $p=\boxed{\text{(セ)}}$ のときである。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

4

実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し，

$$g(x)=\int_0^{2x} e^{-f(t-x)}dt$$

とおく。

（1） $f(x)=x$ のとき，$g(x)=$ $\boxed{\text{（ソ）}}$ である。

（2） 実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し，$g(x)$ は奇関数であることを示しなさい。

（3） $f(x)=\sin x$ のとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めると，$g'(x)=$ $\boxed{\text{（タ）}}$ である。

（4） $f(x)$ が偶関数であり，$g(x)=x^3+3x$ となるとき，$f(x)=$ $\boxed{\text{（チ）}}$ である。このとき，$\int_0^1 f(x)dx$ の値は $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

5

平行四辺形ABCDにおいて，AB＝2，BC＝3とし，対角線ACの長さを4とする。辺AB，BC，CD，DA上にそれぞれ点E，F，G，HをAE＝BF＝CG＝DH＝xを満たすようにとる。ただし，xは$0<x<2$の範囲を動くとする。さらに，対角線AC上に点PをAP＝x^2を満たすようにとる。以下では，平行四辺形ABCDの面積をSとする。

(1) △AEPの面積をT_1とする。$\dfrac{T_1}{S}$は，xを用いて表すと $\boxed{\text{（テ）}}$ となる。

(2) △EFPの面積をT_2とする。$\dfrac{T_2}{S}$は，$x=$ $\boxed{\text{（ト）}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{（ナ）}}$ をとる。

(3) △GHPの面積をT_3とする。$\dfrac{T_3}{S}=\dfrac{1}{3}$となるのは$x=$ $\boxed{\text{（ニ）}}$ のときである。

(4) 点Pが線分EH上にあるのは$x=$ $\boxed{\text{（ヌ）}}$ のときである。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。