

注意 問題1, 2, 3, 4, 5の解答を, 解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄(ア)～(ム)については, 分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの(数, 式など)を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

- (1) 複素数 x が $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を満たすとする。 $y = x + \frac{1}{x}$ とおくと y の満たす2次方程式は $\boxed{\text{ア}} = 0$ である。したがって元の方程式の解を複素数の範囲ですべて求めると $\boxed{\text{イ}}$ となる。
- (2) 実数 x, y が $x^3 + y^3 + xy - 3 = 0$ を満たすとする。 $s = x + y, t = xy$ とおくと, t は s を用いて $t = \boxed{\text{ウ}}$ と表せる。さらにこのとき s のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 3で割った余りが1となる自然数 n に対し, $(x-1)(x^{3n}-1)$ が $(x^3-1)(x^n-1)$ で割り切れることを証明しなさい。

2

座標平面上で点 P は原点 O を出発点とし、さいころを投げて 1 または 2 の目が出たときは x 軸方向の正の向きに 1 進み、3 または 4 の目が出たときは y 軸方向の正の向きに 1 進み、5 または 6 の目が出たときは y 軸方向の負の向きに 1 進むものとする。たとえば、さいころを 3 回投げて、1 回目に 2、2 回目に 5、3 回目に 4 の目が出たとすると、点 P の座標は順に $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$ となる。

(1) さいころを 2 回投げたとき、点 P の y 座標が 0 である確率は である。

(2) さいころを 3 回投げたとき、点 P の x 座標または y 座標が 1 以上である確率は である。

(3) さいころを 4 回投げたとき、点 P の x 座標が 2 以上である確率は であり、点 P の x 座標が 2 以上であるという条件の下で点 P の y 座標が 0 である条件付き確率は である。

(4) さいころを n 回 ($n \geq 2$) 投げたときはじめて点 P の x 座標が 2 となる確率は である。

(5) さいころを n 回 ($n \geq 3$) 投げたとき、1 回目から n 回目までに点 P が直線 $x = 2$ 上の格子点を 2 つ以上通る確率は である。ただし、座標平面上で x 座標、 y 座標がともに整数である点 (x, y) のことを格子点といい、さいころを n 回投げたとき、点 P が直線 $x = 2$ 上の格子点にいる場合は、 n 回目までにこの格子点を通ったものとする。

3

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対し $a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$ とおく。

(1) a_1 を計算すると $a_1 = \boxed{\text{(サ)}}$ である。また、部分積分を用いると 2 以上の自然数 n に対し $a_n = \boxed{\text{(シ)}}$ a_{n-2} となることがわかる。

(2) $a_n a_{n-1}$ を n を用いて表すと $a_n a_{n-1} = \boxed{\text{(ス)}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。

(3) 数列 $\left\{ \frac{a_n}{a_{n-1}} \right\}$ が 1 に収束することを証明しなさい。

(4) 以上の結果を用いると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \boxed{\text{(セ)}}$ であることがわかる。

4

空間内に $|\overrightarrow{OA}|=2$ となる 2 点 O, A があり, 空間内の図形 S は, $|\overrightarrow{OP}|=\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ を満たす点 P 全体からなるとする。点 B は図形 S 上の点で, $|\overrightarrow{OB}|=6$ であるとし, 直線 AB と図形 S との交点のうち, 点 B とは異なる点を C とする。点 D は図形 S 上の点で, $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$ かつ $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|$ であるとする。

(1) $\angle AOB =$ であり, $\overrightarrow{OC} =$ $\overrightarrow{OA} +$ \overrightarrow{OB} である。また, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} =$ である。

(2) 3 点 A, B, D を含む平面で図形 S を切った切り口の曲線を T とし, 曲線 T 上の点 Q が $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OD}$ (s, t, u は実数) を満たすとする。このとき s と t は関係式

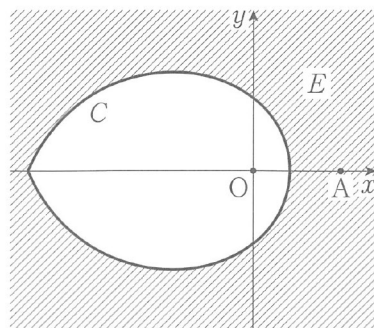
$$s^2 + \text{} t^2 + \text{} st + \text{} s + \text{} t = \text{}$$

を満たす。

(3) 曲線 T 上の点で, 点 O からの距離が最大となる点を E とする。 \overrightarrow{OE} は $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ を用いて $\overrightarrow{OE} =$ $\overrightarrow{OA} +$ $\overrightarrow{OB} +$ \overrightarrow{OD} と表すことができる。また, 四面体 $OCDE$ の体積は である。

5

座標平面上に図の太線のような曲線 C があり，その外部（図の斜線部分，境界線 C を含む）を領域 E とする。曲線 C 上の点 P は次の条件を満たすとする。ただし v は 1 より大きい実数である。



線分 OP の長さと，点 $A(1, 0)$ から点 P への領域 E 内の最短経路の長さの比が $1 : v$ である。

- (1) $OQ : AQ = 1 : v$ を満たす点 Q の軌跡 S は円であり，その半径は (フ) である。点 A を通る直線が， y 座標が正の点 B で円 S に接するとき，点 B の座標は (ヘ)，(ホ) である。

曲線 C の $x \geq$ (ヘ) の部分は円 S の一部となる。曲線 C の $x \leq$ (ヘ)， $y \geq 0$ の部分を曲線 C_1 とする。曲線 C_1 上の点 R に対し，点 A から点 R への領域 E 内の最短経路は，線分 AB と，点 B から点 R までの曲線 C_1 の部分をつなげたものである。

- (2) 極座標 (r, θ) に関する曲線 C_1 の極方程式を $r = f(\theta)$ とし，点 B の偏角を θ_0 ，点 R の偏角を θ_1 とする。このとき，点 A から点 R までの領域 E 内の最短経路の長さは $f(\theta)$ とその導関数 $f'(\theta)$ を用いると

$$AB + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \boxed{\text{(マ)}} d\theta$$

となる。これが $vf(\theta_1)$ に等しくなるので， $f(\theta) = \beta e^{\alpha(\theta - \theta_0)}$ の形をしているとして α, β を求めると $\alpha =$ (ミ) となる。特に $v = \sqrt{2}$ のとき，曲線 C で囲まれた領域の面積は (ム) となる。