2019年度

慶應義塾大学入学試験問題

理工学部

数学

注意 1. 氏名と受験番号は，解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。

2. 解答は，解答用紙の所定の欄に，読みやすいように，ていねいに記入しなさい。

3. 解答用紙の余白および裏面には，何も書いてはいけません。

4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11，12ページは余白です。

5. 問題冊子の余白は，計算および下書きに使用してもかまいません。

6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注　意　問題**1**, **2**, **3**, **4**, **5** の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ヌ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　次の設問に答えなさい。

（i）　$x>0$ に対し $\sqrt{x}\log x > -1$ であることを示しなさい。ただし，自然対数の底 e の値は 2.718…… である。

（ii）　（i）の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を示しなさい。

（2）　複素数 z が $|z-1| = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ および $|z^2-1| = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，$z =$ $\boxed{\quad（ア）\quad}$ である。

（3）　平面上のベクトル $(1,\ 1)$ を $\vec{a}$ とし，実数 θ に対し $\vec{p} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。実数 x の関数 $|x\vec{a}-\vec{p}|^2$ の導関数を x と θ を用いて表すと，$\boxed{\quad（イ）\quad}$ である。θ が実数全体を動くとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{(x\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{a}}{|x\vec{a}-\vec{p}|^2}\,dx$ の最大値は $\boxed{\quad（ウ）\quad}$ である。

2

関数 $f(x)$ を次の式で定める。

$$\begin{cases} x \geqq 0 \text{ のとき} \quad f(x) = 2x^2 - 4x \\ x < 0 \text{ のとき} \quad f(x) = -\dfrac{9}{8}x^2 - 4x \end{cases}$$

（1） $f(x)$ のすべての極値の和は $\boxed{\text{（エ）}}$ である。

（2） 曲線 $y = f(x)$ を C とする。点 $(a,\ f(a))$ における C の接線を l_1 とする。ただし，a は 0 でない実数である。また，直線 l_2 を点 $(a,\ f(a))$ を通り l_1 とは異なる曲線 C の接線とし，l_2 が曲線 C と接する点の座標を $(b,\ f(b))$ とする。b を a の式で表すと，$a > 0$ のとき $b = \boxed{\text{（オ）}}$，$a < 0$ のとき $b = \boxed{\text{（カ）}}$ となる。

（3） （2）で定めた直線 l_1 と直線 l_2 が垂直に交わるような a の値は全部で 4 つある。それら 4 つの中の最大値は $\boxed{\text{（キ）}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{（ク）}}$ である。

3

nを4以上の自然数とする。数字の1からnが書かれたカードが1枚ずつ，合計n枚のカードが入った箱がある。この箱の中からカードを1枚ずつ取り出し，3つの連続した数字のカードが取り出されたところで終了する。ただし，一度取り出したカードは箱に戻さないものとする。例えば，$n=6$の場合で

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2$$

の順で取り出したとき，3つの連続した数字1，2，3のカードが取り出されたので，4枚目で終了する。

（1） $n=6$の場合を考える。3枚目で終了する確率は $\boxed{\text{（ケ）}}$ であり，5枚目で終了する確率は $\boxed{\text{（コ）}}$ である。5枚目で終了するという条件の下で，5枚目のカードに書かれた数字が2である条件付き確率は $\boxed{\text{（サ）}}$ である。

（2） $n \geqq 4$の場合を考える。4枚目で終了し，かつ，取り出したカードに書かれた4つの数字が連続している確率をnを用いて表すと $\boxed{\text{（シ）}}$ となる。また，4枚目で終了する確率をnを用いて表すと $\boxed{\text{（ス）}}$ となる。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

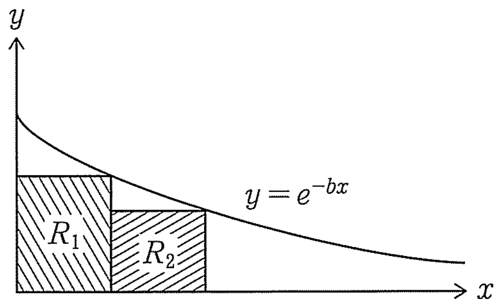
このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

4

正の実数 b に対し，連立不等式 $0 \leqq y \leqq e^{-bx}$，$x \geqq 0$ の表す領域を D とする。ただし，e は自然対数の底である。図のように領域 D 内に長方形 R_1，R_2，R_3，…… を，次の規則に従って配置する。



1．R_1 は，領域 D 内に含まれ，下側の辺が x 軸上にあり，左側の辺が y 軸上にある長方形のうち，面積が最大となる長方形である。

2．R_2 は，領域 D 内に含まれ，下側の辺が x 軸上にあり，左側の辺が R_1 の右側の辺上にある長方形のうち，面積が最大となる長方形である。

3．以降同様にして，$n=3,\ 4,\ 5,$ …… に対し R_n は，領域 D 内に含まれ，下側の辺が x 軸上にあり，左側の辺が R_{n-1} の右側の辺上にある長方形のうち，面積が最大となる長方形である。

長方形 R_n（$n=1,\ 2,\ 3,$ ……）の面積を a_n とする。

（1） 関数 $f(x)=xe^{-bx}$（$x \geqq 0$）は，$x=$ $\boxed{\text{（セ）}}$ で最大値をとる。よって $a_1=$ $\boxed{\text{（ソ）}}$ である。

（2） 長方形 R_n の右下の頂点の x 座標 p_n を n と b を用いて表すと $p_n=$ $\boxed{\text{（タ）}}$ である。求める過程を解答欄（2）に記入しなさい。

（3） $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n と b を用いて表すと $\boxed{\text{（チ）}}$ である。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=1$ となるとき，$b=$ $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

5

空間内の図形 O–ABCD は，OA = 3 である正四角錐とする。ただし，正四角錐 O–ABCD とは，頂点が O，底面が正方形 ABCD で 4 つの側面が合同な二等辺三角形となる四角錐のことをいう。

（1） 点 O から平面 ABCD に垂線を下ろし，平面 ABCD との交点を H とする。$\angle \mathrm{AOH} = \theta$ としたとき，線分 AC の長さを θ を用いて表すと $\boxed{\text{（テ）}}$ である。また，正四角錐 O–ABCD の体積を θ を用いて表すと $\boxed{\text{（ト）}}$ である。

以下，OA = 3 であり，2 点 O，A は固定されているとする。

（2） 図形 O–ABCD が正四角錐であるという条件を満たしながら，3 点 B，C，D が動くとき，正四角錐 O–ABCD の体積の最大値は $\boxed{\text{（ナ）}}$ である。

（3） 正四角錐 O–ABCD の体積が $\boxed{\text{（ナ）}}$ であるという条件を満たしながら，3 点 B，C，D が動くとする。このとき，△OAC の周および内部が通過しうる範囲を K_1，△OAB の周および内部が通過しうる範囲を K_2 とする。K_1 の体積は $\boxed{\text{（ニ）}}$ であり，K_1 と K_2 の共通部分の体積は $\boxed{\text{（ヌ）}}$ である。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。