I. 以下の問いに答えよ。

(i) kを自然数とする。数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとするとき，$\{S_n\}$が初項k，公比kの等比数列であるとする。

- $k=3$の場合，$a_n \geqq 5000$を満たすのは$n \geqq \boxed{(1)}$のときである。
- a_nが100の倍数となるnが存在するような10以下の自然数kは$\boxed{(2)}$つあり，このとき，a_nが100の倍数となるのは$n \geqq \boxed{(3)}$のときである。

(ii) αを$0 \leqq \alpha < 2\pi$を満たす定数とする。実数tが$0 \leqq t \leqq 2\pi$の範囲で変化するとき，座標平面上の点$\mathrm{P}(\sin t, \sin(t+\alpha))$の軌跡をTとする。

- Tが線分となるようなαの値を解答用紙Bの(ア)欄にすべて記せ。
- Tが原点を中心とする円となるようなαの値を解答用紙Bの(イ)欄にすべて記せ。

II. a を正の実数，b, c を実数とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とし，$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とする。

(i) 放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=f'(x)$ が接するための必要十分条件は

$$b^2 = \boxed{\quad (ウ) \quad} \qquad \cdots (A)$$

である。

(ii) 条件 (A) が成り立つとき，その接点の座標は

$$\left(\boxed{(4)} - \frac{b}{\boxed{(5)}\,a},\ \boxed{(6)}\,a \right)$$

である。このとき，直線 $y=f'(x)$ は放物線 $y=-f(x)$ とも接し，その接点 P の座標は

$$\left(\boxed{(7)\ (8)} - \frac{b}{\boxed{(9)}\,a},\ \boxed{(10)\ (11)}\,a \right)$$

である。

(iii) 直線 $y=f'(x)$ が原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 O と接するための必要十分条件は

$$b^2 = \boxed{\quad (エ) \quad} \qquad \cdots (B)$$

である。この条件が成り立つとき，その接点を Q とする。

(iv) 条件 (A)，(B) が成り立ち，さらに点 P が点 Q と一致するのは，

$$a = \frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}},\ b = \boxed{(14)\ (15)},\ c = \frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}}$$

のときである。このとき，円 O は放物線 $y=f(x)$ とただ 1 つの共有点 $\left(\boxed{(18)}, \boxed{(19)}\right)$ をもち，放物線 $y=f(x)$，直線 $y=f'(x)$ および円 O で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}} - \dfrac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}\pi$ である。

III. 球面S: $x^2-8x+y^2-4y+z^2+6z+20=0$ は点A($\boxed{(24)}$, $\boxed{(25)}$, $\boxed{(26)}$) で xy 平面と接し，球面Sと zx 平面との交わりは中心B($\boxed{(27)}$, $\boxed{(28)}$, $\boxed{(29)\ (30)}$), 半径 $\sqrt{\boxed{(31)}}$ の円である。

球面Sの中心をC，線分ABを $\sqrt{3}:2$ に外分する点をPとすると，Pの座標は

$$\left(\boxed{(32)},\ \boxed{(33)}+\boxed{(34)}\sqrt{\boxed{(35)}},\ \boxed{(36)}+\boxed{(37)}\sqrt{\boxed{(38)}}\right)$$

であり，$\angle \mathrm{ACP}=\dfrac{\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}}\pi$（ただし $0\leqq\angle \mathrm{ACP}\leqq\pi$）である。また，三角形BPCの辺および内部が球面Sと交わってできる図形は，長さ $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}}\pi$ の円弧である。

IV. 3つの袋A，B，Cがある。袋Aには，1から7までの番号が書かれた玉がそれぞれ2個ずつ，計14個入っている。また，袋B，袋Cには何も入っていない。以下，番号iが書かれた玉を「玉i」と呼ぶことにする。

袋Aから無作為に玉を1個取り出して袋Bに入れる。ここで袋Bに入れられた玉を玉iとするとき，玉$i-1$，玉i，玉$i+1$のうち袋Aに入っているものをそれぞれ1個ずつ取り出して袋Cに入れる。この一連の操作を繰り返す。

例えば，1回目の操作の最初に玉7が袋Bに入れられたとする。このとき，袋Aには玉6と玉7は入っているが，玉8は入っていないので，玉6と玉7が1個ずつ袋Aから袋Cに移される。以上で1回目の操作が終わり，袋Aに玉1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6の計11個が入った状態で2回目の操作を始める。

(i) 1回目の操作で玉4が袋Bに入れられたとき，2回目の操作で玉5が袋Bに入れられる確率は $\dfrac{\boxed{(43)}}{\boxed{(44)\,(45)}}$ である。

(ii) 1回目の操作で玉2が袋Bに入れられ，かつ2回目の操作で玉1が袋Bに入れられる確率は $\dfrac{\boxed{(46)}}{\boxed{(47)\,(48)}}$ である。

$1 \leqq i < j \leqq 7$ を満たす整数i, jに対し，2回の操作を行った後に袋Bに玉iと玉jが入っている事象を$B_{i,j}$とし，事象$B_{i,j}$の確率を$P(B_{i,j})$で表す。

(iii) $P(B_{1,2}) = \dfrac{1}{7} \times \dfrac{\boxed{(49)}}{11} + \dfrac{1}{7} \times \dfrac{\boxed{(50)}}{10} = \dfrac{\boxed{(51)}}{110}$ である。同様に，

$$P(B_{1,3}) = \dfrac{\boxed{(52)}}{\boxed{(53)\,(54)}},\ P(B_{1,7}) = \dfrac{\boxed{(55)}}{\boxed{(56)\,(57)}},$$

$$P(B_{2,3}) = \dfrac{\boxed{(58)}}{\boxed{(59)\,(60)}},\ P(B_{2,4}) = \dfrac{\boxed{(61)}}{\boxed{(62)\,(63)}}$$

である。

(iv) ${}_7\mathrm{C}_2$ 個の事象 $B_{1,2}, B_{1,3}, \cdots, B_{6,7}$ のうち，起こる確率が $P(B_{1,2})$ であるものは $\boxed{(64)}$ 個，$P(B_{1,3})$ であるものは $\boxed{(65)}$ 個，$P(B_{1,7})$ であるものは $\boxed{(66)}$ 個，$P(B_{2,3})$ であるものは $\boxed{(67)}$ 個，$P(B_{2,4})$ であるものは $\boxed{(68)}$ 個である。

(v) 3 回の操作の後，袋 B に入っている玉の番号が全て偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}\,\boxed{(71)}}$ である。