

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(3)(ii)に答えなさい。

(1) 不等式

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leq 7\left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$$

をみたす実数 x の範囲を不等式で表すと である。

(2) 1以上100以下のすべての自然数の集合を U とする。 U の部分集合 A および B を

$$A = \{n \mid n \in U \text{ かつ } n \text{ を } 5 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る}\}, B = \{n \mid n \in U \text{ かつ } n \text{ を } 7 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る}\}$$

と定めるとき、集合 $A \cup B$ に属する自然数の総和は である。

(3) 与えられた n 個の実数 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ に対して、関数

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

を考える。

(i) $f(x)$ は x の連続関数であり、各々の開区間 (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \dots, n+1$) において微分可能である。ただし $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$ とおく。区間 (x_{i-1}, x_i) において $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \input{text}{(う)}$ である。

(ii) ある実験において計測を n 回繰り返し行って、データ $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ を得た。これらのデータの中央値を m とするとき、関数 $f(x)$ は $x = m$ において最小値をとることを示しなさい。

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

袋が1つと赤玉、白玉がそれぞれ3個ずつ用意されている。袋の中に玉が3個入った状態に対して、以下の操作 T を考える。

操作 T

(T1) 袋の中から無作為に玉を2個取り出す。

(T2) (a) 取り出した2個の玉の色が異なる場合は、取り出した2個の玉をそのまま袋に戻す。

(b) 取り出した2個の玉の色が同じ場合は、その色と異なる色の玉を2個袋の中に入れる。

ここで次の2つの状態を考える。

状態 A：袋の中に赤玉2個と白玉1個が入っている状態。

状態 B：袋の中に白玉3個のみが入っている状態。

以下 n を自然数とし、状態 A から始めて操作 T を繰り返し行う。

(1) n 回の操作を繰り返し終えたとき状態 A である確率を p_n とすると、 $p_1 =$ であり、一般に $p_n =$ である。

(2) n 回の操作を終えるまでに状態 B が1回だけおこる確率を q_n とすると、 $q_4 =$ であり、一般に $q_n =$ である。

(3) n 回の操作を終えるまでに状態 B がちょうど2回おこる確率を r_n とすると、 $r_4 =$ であり、一般に $n \geq 3$ のとき $r_n =$ である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面における円 $x^2 + y^2 = 4$ を C とし、 C の内側にある点 $P(a, b)$ を 1 つ固定する。
 C 上に点 Q をとり、線分 QP の垂直二等分線と線分 OQ との交点を R とする。ただし O は
 座標原点である。点 Q が円 C 上を一周するとき、点 R が描く軌跡を $S(a, b)$ とする。

(1) $S(a, b)$ は長軸の長さ ，短軸の長さ の楕円である。点 R の
 x 座標と y 座標をそれぞれ $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ (ただし $r > 0$ かつ $0 \leq \theta < 2\pi$)
 とすると、 $S(1, 1)$ の方程式は $r =$ と表される。 $S(1, 1)$ 上の点で y 座標が
 最大となる点の座標を $(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ とすると $r_0 =$ ， $\theta_0 =$
 である。

(2) t を $0 < t < 2$ の範囲で動かすとき、 $S(t, 0)$ が通過してできる領域の面積は
 である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

xyz 空間の zx 平面にある曲線 $z = x^2$ の, $0 \leq z \leq h$ に対する部分を C とする。ただし $h > 0$ である。回転軸 l を z 軸にとり, C を l のまわりに 1 回転させて得られる曲面からなる容器を S とする。 S に水を満たした後, S の回転軸 l を z 軸に対して角 θ だけ傾ける。以下 $a = \tan \theta$ とおく。

(1) 水がすべてこぼれず, 容器の中に残るための条件は $0 \leq a < \boxed{\text{(あ)}}$ である。

このとき空気に触れている水面の面積を $T(a)$ とすると $T(a) = \boxed{\text{(い)}}$ である。

$\lim_{a \rightarrow +0} T'(a) = \boxed{\text{(う)}}$ であり, a の関数 $T(a)$ が $0 < a < \boxed{\text{(あ)}}$ の範囲に極大値をもつための条件は $h > \boxed{\text{(え)}}$ である。

(2) $a = \sqrt{h}$ のとき容器に残った水の体積 V を求めると $V = \boxed{\text{(お)}}$ である。ただしその計算にあたって必要ならば次の定積分の値を用いてよい。

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{3\pi}{128}, \quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{16}$$