

I 以下の に最もふさわしい数を求め、所定の解答欄に記入しなさい。
分数は分母を有理化して答えなさい。

(1) $\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \sqrt{2}$ を有理数で表すと (ア) である。

(2) a を正の実数, p を実数とする。 $a^{2p} = 3$ のとき, $\frac{a^{2p} - a^{-2p}}{a^p + a^{-p}}$ の値は (イ) である。

(3) 関数 $f(\theta) = \cos 2\theta + 2 \cos \theta$ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で最小値をとるのは $\theta =$ (ウ) のときであり, 最大値をとるのは $\theta =$ (エ) のときである。

(4) 3個のさいころを同時に投げるとき, 出た目の最小値が2以上となる確率は (オ) であり, 最小値がちょうど2となる確率は (カ) である。
また, 出た目の最小値が2であったとき, どの2つの目も互いに素である条件付き確率は (キ) である。

(5) i を虚数単位とし, $\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}$ とする。このとき, a, b を実数とする
2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解の1つが α であるならば, $a =$ (ク),
 $b =$ (ケ) である。また, $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2$ とするとき, $f(\alpha)$ の
値は (コ) である。

II 以下の に最もふさわしい数または式などを求め、所定の解答欄に記入しなさい。分数は分母を有理化して答えなさい。また、(3)は指示に従って解答しなさい。

(1) 円 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ を C とするとき、円 C の中心の座標は (サ) であり、半径は (シ) である。また、円 C と直線 $y = 3x - 1$ の2つの共有点を A, B とするとき、線分 AB の長さは (ス) であり、線分 AB の垂直二等分線の方程式は $y =$ (セ) である。

(2) $a_1 = 4, 4a_{n+1} = 2a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ (ソ) である。また、 $\sum_{n=1}^{\ell} a_n \geq 20$ を満たす最小の自然数 ℓ は (タ) である。

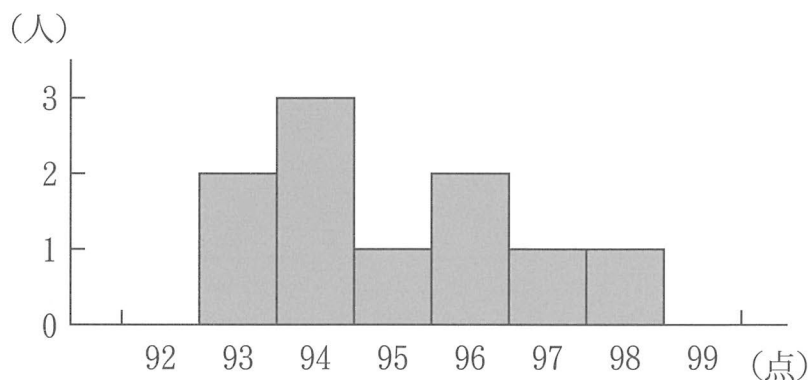
(3) 次の2つの命題の証明をそれぞれ所定の解答欄に書きなさい。

(i) 整数 n が3の倍数でないならば、 n^2 を3で割ったときの余りは1である。

(ii) 3つの整数 x, y, z が等式 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たすならば、 x と y の少なくとも一方は3の倍数である。

Ⅲ 以下の に最もふさわしい数または式を求め、所定の解答欄に記入しなさい。

- (1) ある学校で 100 点満点の数学のテストを行うことになった。まず 10 人の教員で解いてみたところ、その得点のヒストグラムは以下ようになった。ただし、得点は整数値とする。



このデータの平均値は (チ) 点，中央値は (ツ) 点，最頻値は (テ) 点，分散は (ト) である。

- (2) A 組と B 組の 2 つのクラスで数学のテストを行ったところ、A 組の得点の平均値が \bar{x}_A ，分散が s_A^2 ，B 組の得点の平均値が \bar{x}_B ，分散が s_B^2 となった。ただし、 \bar{x}_A ， \bar{x}_B ， s_A^2 ， s_B^2 はいずれも 0 ではなかった。このとき、B 組の各生徒の得点 x に対して、正の実数 a と実数 b を用いて $y = ax + b$ と変換し、 y の平均値と分散を A 組の得点の平均値と分散に一致させるためには、 $a =$ (ナ) ，
 $b =$ (ニ) と設定すればよい。

IV 以下の に最もふさわしい数または式を求め、所定の解答欄に記入しなさい。

a を 1 以上の実数とし、 $AB = BC = CA = 1$ および $AD = BD = CD = a$ を満たす四面体 $ABCD$ を考える。このとき $\cos \angle BAD =$ (ヌ) である。また、 AD の中点を E としたとき、 \overrightarrow{EB} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} を用いて表すと、 $\overrightarrow{EB} =$ (ネ) となるので、 $|\overrightarrow{EB}| =$ (ノ) で、 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} =$ (ハ) である。よって、 $a = 1$ のとき $\cos \angle BEC =$ (ヒ) であり、 $\angle BEC = 60^\circ$ となるのは $a =$ (フ) のときである。

V 以下の に最もふさわしい数または式などを求め、所定の解答欄に記入しなさい。また、(1)は指示に従って解答しなさい。

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x+1)(|x-1| - 1) + 2$$

で定める。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) k を実数とする。このとき、方程式 $f(x) = k$ が異なる 3 つの実数解をもつような k の値の範囲は (へ) である。

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(0, f(0))$ における接線 l の方程式は $y =$ (ホ) である。また、曲線 $y = f(x)$ と直線 l は 2 つの共有点をもつが、点 P とは異なる共有点を Q とするとき、点 Q の x 座標は (マ) である。さらに、曲線 $y = f(x)$ と直線 l で囲まれた図形の面積は (ミ) である。

(4) 関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

で定める。このとき、 $F'(x) = 0$ を満たす x をすべて求めると、 $x =$ (ム) である。これより、関数 $F(x)$ は $x =$ (メ) で最小値 (モ) をとることがわかる。