[1] 座標平面上の原点を中心とする半径 2 の円を C_1，中心の座標が $(7,0)$，半径 が 3 の円を C_2 とする．さらに r を正の実数とするとき，C_1 と C_2 に同時に外接する円で，その中心の座標が (a,b)，半径が r であるものを C_3 とする．ただし，2つの円が外接するとは，それらが1点を共有し，中心が互いの外部にあるときをいう．

(1) r の最小値は $\boxed{(1)}$ であり，a の最大値は $\boxed{(2)}$ となる．

(2) a と b は関係式

$$b^2 = \boxed{(3)}\boxed{(4)}\left(a+\boxed{(5)}\boxed{(6)}\right)(a-4)$$

を満たす．

(3) C_3 が直線 $x=-3$ に接するとき，$a = \dfrac{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}$，$|b| = \dfrac{\sqrt{\boxed{(10)}\boxed{(11)}\boxed{(12)}}}{\boxed{(13)}}$ である．

(4) 点 (a,b) と原点を通る直線と，点 (a,b) と点 $(7,0)$ を通る直線が直交するとき，$|b| = \dfrac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$ となる．

[2] 1 個のさいころを繰り返し投げ，出た目の数により以下の (a), (b) に従い得点を定める.

(a) 最初から 10 回連続して 1 の目が出た場合には，10 回目で投げ終えて，得点を 0 点とする.

(b) m を $0 \leqq m \leqq 9$ を満たす整数とする．最初から m 回連続して 1 の目が出て，かつ $m+1$ 回目に初めて 1 以外の目 n が出た場合には，続けてさらに n 回投げたところで投げ終えて，1 回目から $m+n+1$ 回目までに出た目の数の合計を得点とする．ただし，最初から 1 以外の目が出た場合には $m=0$ とする.

(1) 得点が 49 点であるとする．このとき，$n = \boxed{(17)}$ となり，m の取り得る値の範囲は $\boxed{(18)} \leqq m \leqq \boxed{(19)}$ であり，得点が 49 点となる確率は $\dfrac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}{6^{16}}$ である．また，得点が 49 点で，さいころを投げる回数が 15 回以上である確率は $\dfrac{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{6^{16}}$ となる．さらに，得点が 49 点である条件のもとで，さいころを投げる回数が 14 回以下である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}\boxed{(27)}}$ となる.

(2) さいころを投げる回数が 15 回以上である確率は $\dfrac{\boxed{(28)}}{6^{10}}$ となる．ゆえに，さいころを投げる回数が 14 回以下である条件のもとで，得点が 49 点となる条件付き確率は，$k = \boxed{(29)}$ とおいて $\dfrac{1}{6^k\left(6^{10} - \boxed{(30)}\right)}$ となる.

(3) 得点が正の数で，かつ，さいころを投げる回数が 14 回以下である条件のもとで，得点が 49 点となる条件付き確率は，$l = \boxed{(31)}$ とおいて $\dfrac{1}{6^l\left(6^{10} - \boxed{(32)}\right)}$ となる.

[3] 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおく．$\{a_n\}$ は，$a_2 = 1$, $a_6 = 2$ および

$$(*) \qquad S_n = \frac{(n-2)(n+1)^2}{4} a_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たすとする．

(1) $a_1 = -\boxed{(33)}$ である．$(*)$ で $n = 4, 5$ とすると，$a_3 + a_4$ と a_5 の関係が 2 通り定まり，$a_5 = \boxed{(34)}$ と求まる．さらに $(*)$ で $n = 3$ として，$a_3 = \boxed{(35)}\boxed{(36)}$，$a_4 = \boxed{(37)}\boxed{(38)}$ と求まる．

(2) $n \geqq 2$ に対して $a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから，$(*)$ とあわせて

$$\left(n - \boxed{(39)}\right)\left(n + \boxed{(40)}\right)^2 a_{n+1} = \left(n^3 - \boxed{(41)}\, n^2 + \boxed{(42)}\right) a_n \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

ゆえに，$n \geqq 3$ ならば $\left(n + \boxed{(43)}\right) a_{n+1} = \left(n - \boxed{(44)}\right) a_n$ となる．そこで，$n \geqq 3$ に対して $b_n = (n-r)(n-s)(n-t)a_n$ とおくと，漸化式

$$b_{n+1} = b_n \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

が成り立つ．ただしここに，$r < s < t$ として $r = \boxed{(45)}$，$s = \boxed{(46)}$，$t = \boxed{(47)}$ である．したがって，$n \geqq 4$ に対して

$$a_n = \frac{\boxed{(48)}\, a_3}{(n-r)(n-s)(n-t)}$$

となる．この式は $n = 3$ のときも成立する．

(3) $n \geqq 2$ に対して

$$S_n = \frac{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\left(n + \boxed{(51)}\right)\left(n - \boxed{(52)}\right)}{n\left(n - \boxed{(53)}\right)}$$

であるから，$S_n \geqq 59$ となる最小の n は $n = \boxed{(54)}\boxed{(55)}$ である．

[4] k を実数の定数とする．実数 x は不等式

$$(\star) \qquad 2\log_5 x - \log_5(6x - 5^k) < k - 1$$

を満たすとする．

(1) 不等式 $(\star)$ を満たす x の値の範囲を，k を用いて表せ．

(2) k を自然数とする．$(\star)$ を満たす x のうち奇数の個数を a_k とし

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおく．a_k を k の式で表し，さらに S_n を n の式で表せ．

(3) **(2)** の S_n に対して，$S_n + n$ が 10 桁の整数となるような自然数 n の値を求めよ．なお，必要があれば $0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いよ．

[5] 空間の 2 点 O と A は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 2$ を満たすとし，点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する平面を H とする．平面 H 上の三角形 ABC は，正の実数 a に対し

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 2a, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 3a, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2a^2$$

を満たすとする．ただし，$\vec{u} \cdot \vec{v}$ はベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表す．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．

さらに，線分 AB の平面 H 上にある垂直二等分線を ℓ，線分 AC を $2:1$ に内分する点を通り，線分 AC に直交する H 上の直線を m とする．また，ℓ と m の交点を P とする．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すとき，α, β, γ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 空間の点 Q は $2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{0}$ を満たすとする．直線 PQ が，点 O を中心とする半径 2 の球 S に接しているとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ の値および a の値を求めよ．さらに，直線 ℓ 上の点 R を，直線 QR が S に接し，P とは異なる点とする．このとき $\triangle\mathrm{APR}$ の面積を求めよ．

[6] $F(x)$ は実数を係数とする x の3次式で，x^3 の項の係数は1であり，$y=F(x)$ で定まる曲線を C とする．$\alpha<\beta$ を満たす実数 α,β に対して，C 上の点 $\mathrm{A}\bigl(\alpha, F(\alpha)\bigr)$ における C の接線を L_α とするとき，C と L_α との A 以外の共有点が $\mathrm{B}\bigl(\beta, F(\beta)\bigr)$ であるとする．さらに，B における C の接線を L_β とし，C と L_β との B 以外の共有点を $\bigl(\gamma, F(\gamma)\bigr)$ とする．

(1) 接線 L_α の方程式を $y=\ell_\alpha(x)$ とし，$G(x)=F(x)-\ell_\alpha(x)$ とおく．さらに，曲線 $y=G(x)$ 上の点 $\bigl(\beta, G(\beta)\bigr)$ における接線の方程式を $y=m(x)$ とする．$G(x)$ および $m(x)$ を，それぞれ α,β を用いて因数分解された形に表せ．必要ならば x の整式で表される関数 $p(x), q(x)$ とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}'=p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$$

を用いてもよい．

(2) 接線 L_β の方程式は，**(1)** で定めた $\ell_\alpha(x), m(x)$ を用いて，$y=\ell_\alpha(x)+m(x)$ で与えられることを示せ．さらに，γ を α,β を用いて表せ．

(3) 曲線 C および L_β で囲まれた図形の面積を S とする．S を α,β を用いて表せ．さらに α,β が $-1<\alpha<0$ かつ $1<\beta<2$ を満たすとき，S の取り得る値の範囲を求めよ．必要ならば $r<s$ を満たす実数 r, s に対して成り立つ公式

$$\int_r^s (x-r)(x-s)^2dx=\frac{1}{12}(s-r)^4$$

を用いてもよい．